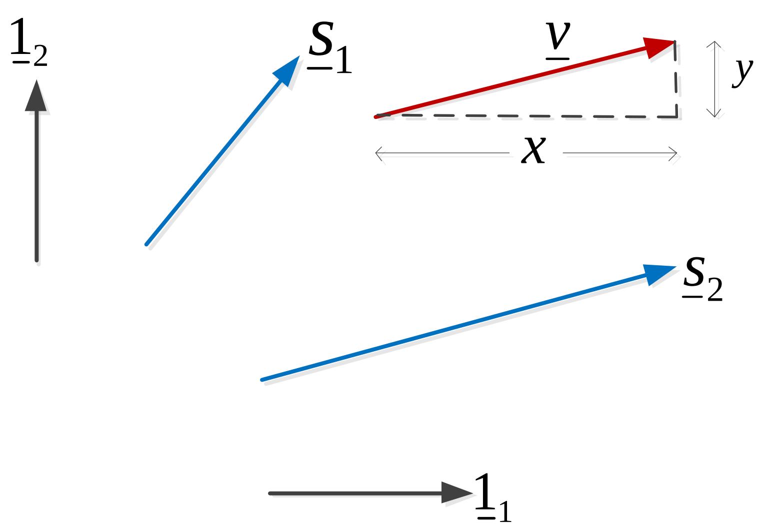
جلسه پنجم

موضوعی که در ادامه به آن خواهیم پرداخت این است که اگر دو پایه یا دو دستگاه تعریف نماییم، چگونه می‌توان بیان یک بردار در یکی از این دستگاه‌ها را به بیان همان بردار در دستگاه دیگر تبدیل کرد.

برای درک بهتر موضوع آن را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

مثال۱: مطابق با شکل زیر دو پایه‌ی $\underline{1}_1$ و $\underline{1}_2$ را تشکیل‌دهنده‌ی دستگاه 1 و دو پایه‌ی $\underline{s}_1$ و $\underline{s}_2$ را تشکیل‌دهنده‌ی دستگاه S در نظر می‌گیریم. حال می‌خواهیم ببینیم اگر بیان بردار در دستگاه موجود باشد، بیان همین بردار در دستگاه چه می‌شود؟



همانطور که در شکل فوق مشاهده می‌نمایید هیچ مبدأی نشان داده نشده است تا مجدداً عدم نیاز به مبدأ گوشزد گردد. خواهید دید در ریاضیات به هیچ مشکلی برنخواهید خورد و حتی وجود مبدأ می‌تواند کلیت ریاضیات موضوع را به هم می‌ریزد. همچنین شما دستگاه 1 را متعامد می‌بینید ولی دستگاه S را غیرمتعامد مشاهده می‌کنید. همچنین طول این بردارهای پایه یکه نمی‌باشد.

مطابق با شکل فرض می‌کنیم مولفه‌های اول و دوم $\underline{v}$در دستگاه 1 به ترتیب x و y باشند یا به عبارت دیگر $^1\underline{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$(بیان بردار $\underline{v}$ در دستگاه 1، xو y است) باشد. حال به دنبال بیان بردار $\underline{v}$ در دستگاه S یا $^S\underline{v}$ هستیم.

اگر $^1\underline{s}_1$ و $^1\underline{s}_2$را بدانیم امیدوار هستیم بتوانیم $^S\underline{v}$را بیابیم. اگر مولفه‌های اول و دوم $^S\underline{v}$به ترتیب v_1و v_2(یا $^S\underline{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$) باشند ما به دنبال یافتن مقادیر v_1 و v_2 هستیم.

بدین منظور اگر $^1\underline{s}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$و همین‌طور $^1\underline{s}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$را اندازه گذاری نماییم (این اندازه‌گذاری با تقریب خوبی از شکل بدست می‌آید). بنابراین به دنبال v_1 و v_2 هستیم که رابطه‌ی زیر را برآورده سازند.

$$\underline{v}=v_1.\underline{s}_1+v_2.\underline{s}_2$$

طبق تساوی برداری فوق، تساوی عددی زیر را داریم:

$$^1\underline{v}=v_1.{}^1\underline{s}_1+v_2.{}^1\underline{s}_2$$

همانطور که می‌دانید بالانویس 1 به معنی بیان آن بردار در دستگاه 1 است. طبق تساوی عددی فوق داریم:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=v_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

معادله‌ی جبری ساده‌ی فوق به صورت ماتریسی نیز می‌تواند نوشته شود:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

به این ترتیب مطابق رابطه‌ی فوق با دانستن v_1 و v_2 می‌توان x و y را بدست آورد. همچنین رابطه‌ی زیر نیز صادق است.

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

بنابراین طبق رابطه‌ی فوق با دانستن x و y به همان چیزی که از ابتدا به دنبالش بودیم یعنی v_1 و v_2 می‌رسیم.

در این قسمت می‌خواهیم تعبیری بیاموزیم که از لحاظ ریاضی بسیار کارگشاست. به ماتریس‌هایی با ابعاد ۲ در۲ ،که در دو رابطه‌ی قبل مشاهده نمودید ماتریس تبدیل از یک دستگاه به دستگاه دیگر می‌گویند و آن‌ها را به صورت زیر بیان می‌کنند.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}_{S}^{1}T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = {}_{S}^{1}T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}_{1}^{S}T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

و همواره رابطه‌ی ${}_{S}^{1}T^{-1} = {}_{1}^{S}T$ برقرار است. اگر به ستون‌های ماتریس‌های تبدیل دقت کنیم داریم:

$${}_{S}^{1}T = \begin{pmatrix} {}^{1}\underline{s}_1 & {}^{1}\underline{s}_2 \end{pmatrix} \qquad {}_{1}^{S}T = \begin{pmatrix} {}^{S}\underline{1}_1 & {}^{S}\underline{1}_2 \end{pmatrix}$$

رابطه‌ی فوق نیز همواره صحیح است و طبق این رابطه با استفاده از بیان بردارهای پایه‌ی یک دستگاه در دستگاه دیگر می‌توان به ماتریس تبدیل بین دو دستگاه دست یافت.

دو دستگاه S و 1 در این مثال دستگاه‌هایی هستند که یکدیگر را عمود نمی‌بینند ولی هر کدام از این دستگاه‌ها خودشان را عمود و یکه می‌بینند. نکته‌ی جالب توجه دیگر که از نتیجه‌ی این مثال حاصل می‌گردد این است که همه‌ی ماتریس‌های معکوس‌پذیر مبدل یک نگرش به نگرش دیگر هستند. همچنین همه‌ی ماتریس‌های تبدیل معکوس‌پذیرند و هر ماتریس معکوس‌پذیری می‌تواند ماتریس تبدیل بین دو دستگاه تعبیر شود.

در ادامه مثالی دیگر ارائه خواهیم نمود.

مثال ۲: فرض کنید دستگاه دیگری به نام t داریم. اگر بیان بردارهای پایه‌ی این دستگاه در دستگاه 1 ${}^{1}\underline{t}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ و ${}^{1}\underline{t}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ باشند ماتریس تبدیل از دستگاه t به دستگاه S (${}_{t}^{S}T$) چه می‌باشد؟

پاسخ: طبق عملیات جبر ماتریسی داریم:

$${}_{t}^{S}T = {}_{1}^{S}T\,{}_{t}^{1}T$$

ماتریس تبدیل ${}^{S}_{1}T$ را که در مثال قبل بدست آورده بودیم و ماتریس تبدیل ${}^{1}_{t}T$ نیز با بیان بردارهای پایه‌ی دستگاه t در دستگاه 1 که موجود می‌باشد بدست می‌آید. بنابراین:

$${}^{S}_{t}T={}^{S}_{1}T\,{}^{1}_{t}T=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

در ادامه کاربرد این روابط را خواهید دید.

میزان هم‌راستایی دو بردار

اگر به یاد داشته باشید در دبیرستان عملیاتی داشتید که میزان هم‌راستایی دو بردار را بدست می‌داد. می‌خواهیم این عملیات را از روی بیان‌ها بدست آوریم.

بردار $\underline{v}$ و پایه‌ی S را در نظر بگیرید و فرض نمایید ${}^{S}\underline{v}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ باشد. آن‌گاه انتظار دارید میزان هم‌راستایی بردار $\underline{v}$و بردار پایه‌ی $\underline{s}_1$ به اندازه‌ی a باشد یا ${}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{s}_1)=a$ باشد($\cdot$ نشان‌دهنده‌ی عملیات مورد نظرمان است). و با همین استدلال ${}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{s}_2)=b$ باشد. همچنین خاصیت شرکت‌پذیری یا خطی‌بودن را نیز برای عملیاتمان تعریف می‌نماییم. بنابراین:

$${}^{S}(\underline{v}\cdot(\underline{s}_1+\underline{s}_2))={}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{s}_1)+{}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{s}_2)$$

حال می‌خواهیم ببینیم در حالت کلی پاسخ چه می‌شود. فرض می‌کنیم ${}^{S}\underline{w}=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}$ باشد.

$${}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{w})={}^{S}(\,\underline{v}\cdot(c.\underline{s}_1+d.\underline{s}_2)\,)={}^{S}(\,\underline{v}\cdot(c.\underline{s}_1)+\underline{v}\cdot(d.\underline{s}_2)\,)=c\,{}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{s}_1)+d\,{}^{S}(\underline{v}\cdot\underline{s}_2)=ca+db$$

همانطور که می‌دانید در حقیقت $ca+db$ همان ضرب داخلی دو بردار $\underline{v}$و $\underline{w}$ بیان شده در دستگاه S یا ${}^{S}(\underline{v}.\underline{w})$ می‌باشد. ضرب داخلی به صورت ماتریسی این‌طور بیان می‌گردد:

$${}^{S}(\underline{v}.\underline{w})={}^{S}\underline{v}^{T}.\underline{w}={}^{S}\underline{w}^{T}.\underline{v}$$

توجه داشته باشید که در رابطه بالانویسِ T همان ترانهاده‌ی ماتریس است (ماتریسی که سطر و ستونش جابجا شده است).

برای اینکه بگوییم دو بردار از دید یک دستگاه چقدر روی هم قرار دارند از ضرب داخلی استفاده می‌کنیم. حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است. بالانویس S در ضرب داخلی به این معنی است که اگر همین ضرب داخلی را از دید دستگاهی دیگر انجام دهیم حاصل ضرب داخلی متفاوت خواهد شد. بنابراین حاصل ضرب داخلی به دیدگاهمان بستگی دارد.

طول بردار

می‌توانیم طول بک بردار را بر اساس ضرب داخلی بدست آوریم. به این صورت که مجذور ضرب داخلی هر بردار با خودش، طول آن بردار از دید آن دستگاه می‌شود.

$$^{S}(\underline{v}.\underline{v}) = |v|^2$$

بنابراین طول یک بردار از دید هر دستگاهی متفاوت خواهد شد.

تعامد دو بردار

با استفاده از ضرب داخلی می‌توان تعامد دو بردار را بیان نمود. به این صورت که اگر ضرب داخلی دو بردار از دید دستگاهی صفر گردد آن دستگاه آن دو بردار را متعامد می‌بیند.

$$^{S}(\underline{v}.\underline{w}) = 0 \longleftrightarrow v \perp w$$

با تغییر دستگاه ممکن است موضوع تعامد دو بردار نیز تغییر کند. به عبارت دیگر ممکن است دو بردار از دید یک دستگاه متعامد باشند ولی از دید دستگاهی دیگر متعامد نباشند؛ ممکن است ضرب داخلی آن دو بردار از دید این دستگاه دیگر صفر نگردد.

یک قرار: ما در ادامه فقط دستگاه‌هایی را را درنظرمی‌گیریم که یکدیگر را هم‌طول و هم‌تعامد می‌بینند. یعنی اگر دو بردار از دید یک دستگاه متعامد باشند از دید دستگاه دیگر نیز متعامدند و اگر طول یک بردار در یک دستگاه مقدار خاصی باشد، طولش از دید دستگاه دیگر نیز همین مقدار است. این دستگاه‌ها می‌توانند دستگاه‌های متفاوتی باشند ولی از آن‌جایی که حاصل ضرب خارجی از دید این دستگاه‌ها یکی است، به این دستگاه‌ها *دستگاه‌های هم‌ضرب داخلی* می‌گویند.

مشابه این موضوع را می‌توانید در بازی‌های کامپیوتری مشاهده نمایید. در این بازی‌ها علی‌رغم این‌که تنها صفحه‌ای در مقابل شما قرار گرفته است، این‌طور به شما القا می‌گردد که در حال نگاه کردن به یک حجم هستید. فکر می‌کنید این کار چطور انجام می‌شود؟ در حقیقت یک بار کلیه‌ی نقاط تصویر در دستگاه مشخص و درستی بیان شده است، سپس مثلاً به جای اینکه شما را بچرخاند این بیان را به دستگاه جدیدی می‌برد که اگر شما چرخیده بودید از این دستگاه جدید به تصویر نگاه می‌کردید. با استفاده از همین روش تبدیل بین دستگاه‌ها آن‌چه به چشم شما خواهد آمد، به شما نشان داده خواهد شد تا شما گمان ببرید که خود چرخیده‌اید.

یا در نقاشی‌ای که از پرسپکتیو استفاده می‌شود مثلاً علی‌رغم اینکه می‌دانید ساختمان به صورت عمود قرار گرفته است، آن را با زاویه‌ی دیگری مشاهده می‌نمایید. همچنین اگر با دوربین از صحنه‌ای عکس‌برداری کنید می‌بینید که زوایای متعامد در آن ممکن است متعامد دیده نشوند.

ماتریس‌های متعامد یکه

اگر دو دستگاه هم‌ضرب داخلی باشند ماتریس تبدیل بین آن‌ها خواص بیشتری خواهد داشت.

اگر و دو دستگاه S و t هم‌ضرب داخلی باشند، داریم:

$$
{}_S^tC = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\underline{s}_1 & {}^t\underline{s}_2 & {}^t\underline{s}_3 \end{pmatrix}
$$

ضرب داخلی ${}^t\underline{s}_1$، ${}^t\underline{s}_2$ و ${}^t\underline{s}_3$ در دستگاه S صفر است و از آن‌جایی که دو دستگاه S و t هم‌ضرب داخلی‌اند، ضرب داخلی این سه بردار پایه در t نیز صفر است. بنابراین تمام ستون‌ها بر هم عمودند. به دلیل اینکه ${}^t\underline{s}_1$، ${}^t\underline{s}_2$ و ${}^t\underline{s}_3$ در S یکه بودند در t نیز یکه‌اند. این موضوع برای سطرها نیز برقرار است، یعنی تمامی سطرها بر هم عمود بوده و طولشان یکه است.

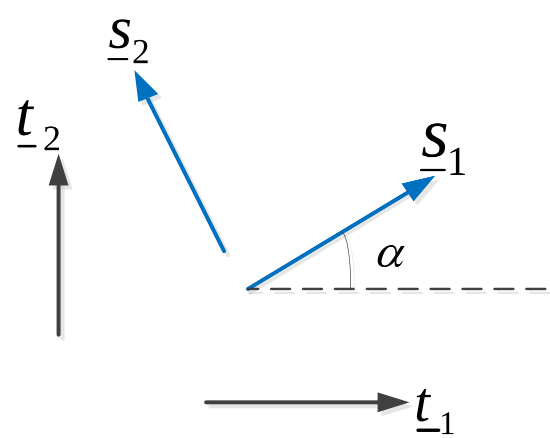
چطور می‌توان این موضوع را برای سطرها اثبات نمود؟

پاسخ: از آن‌جایی که رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$
{}_t^S C = {}_S^t C^{-1} = {}_S^t C^t = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^S\underline{t}_1 & {}^S\underline{t}_2 & {}^S\underline{t}_3 \end{pmatrix}
$$

به این ماتریس‌ها که تمام سطرها و ستون‌هایشان دو به دو متعامد بوده و همه یکه‌اند *ماتریس‌های متعامد یکه* می‌گویند. معکوس این نوع خاص از ماتریس‌ها ترانهاده‌ی آن‌هاست.

فرض کنیم بردارهای پایه‌ی اول و دوم دو دستگاه S و t به صورت زیر تعریف شوند و بردار پایه‌ی سوم هر دو دستگاه را به صورت راستگرد به سمت خارج صفحه در نظر گرفته شود. آن‌گاه $\underline{t}_1$ را به اندازه‌ی α حول محور سوم هر دو دستگاه دوران داده تا به $\underline{s}_1$ برسیم.



در این‌جا لازم به ذکراست که برای هر دستگاه متعامد یکه‌ای یک و تنها یک محور دوران خاص و یک و تنها یک زاویه‌ی دوران خاص می‌توان یافت که به دستگاه دیگر برسد. در این مثال محور دوران محور مشترک بین دو دستگاه S و t یعنی $\underline{s}_3$ یا $\underline{t}_3$ می‌باشد. به این چنین دوران‌هایی که محور دوران بین دو دستگاه، محور مشترک دو دستگاه است، *دوران ساده* می‌گویند.

برای این مثال اگر دوران را راستگرد درنظر بگیریم، ماتریس دوران به صورت زیر بدست می‌آید:

$$
{}_S^t C = \begin{pmatrix} {}^t\underline{s}_1 & {}^t\underline{s}_2 & {}^t\underline{s}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

در رابطه‌ی فوق C به معنی کسینوس زاویه و S به معنی سینوس زاویه است. با توجه به آن‌چه که توضیح داده شد، به ماتریس تبدیل بین دو دستگاه ماتریس دوران نیز می‌گویند. دوران حول محور سوم یک دستگاه به اندازه‌ی α را با $C_3(\alpha)$ نشان می‌دهند.

تمرین: ماتریس‌های دوران $C_2(\alpha)$ و $C_1(\alpha)$ را برحسب زاویه‌ی دوران مشخص α بدست آورید.

(راهنمایی: برای $C_2(\alpha)$ راستاهای دوم دو دستگاه یکی‌اند و برای $C_1(\alpha)$ راستاهای اول دو دستگاه یکی‌اند.)